Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih

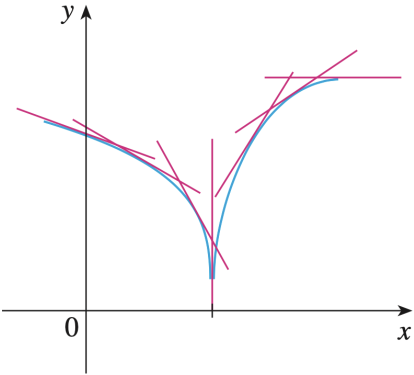
Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Tangentna ravan i linearna aproksimacija

Podsjetimo se da smo kod diferencijabilne funkcije jedne promjenljive $y = f(x)$, u tački $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ imali tangentu



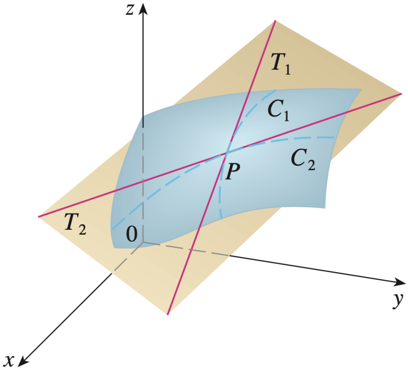
$$t: \qquad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

koja je lokalno aproksimirala grafik funkcije $f(x)$.

- Posmatrajmo sada funkciju $z = f(x, y)$ koja u tački (x_0, y_0) ima parcijalne izvode.
- Tačka $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je jedna tačka na grafiku S funkcije f.
- Kod interpretacije parcijalnih izvoda smo vidjeli da fiksiranjem promjenljive $y = y_0$ dobijamo krivu C_1 sa površi S.
- Slično, za fiksirano $x = x_0$ dobijamo krivu C_2.
- Neka su T_1 i T_2 tangente na krive C_1 i C_2 u tački P:

$$T_1: \qquad z = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0$$

$$T_2: \qquad z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0$$



Tangente
T_1 i T_2 (sijeku se u jednoj tački, a pripadaju različitim koordinatnim ravnima) pa obrazuju **tangentnu ravan**.

Svaka ravan koja sadrži tačku $P(x_0, y_0, z_0)$ ima jednačinu oblika

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0.$$

Dijeljeći jednačinu sa C i postavljajući $a = -A/C$ i $b = -B/C$ dobijamo

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Uzimajući u obzir da T_1 i T_2 pripadaju tangentnoj ravni dobijamo da je

$$a = f_x(x_0, y_0), \quad b = f_y(x_0, y_0)$$

Dakle, ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode na nekoj okolini tačke (x_0, y_0), onda je jednačina tangentne ravni u tački P

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Primjer. Odrediti tangentnu ravan na paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ u tački $(1, 1, 3)$.

Neka je $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Grafik funkcije f je paraboloid. Tada je

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_x(1, 1) = 4$$

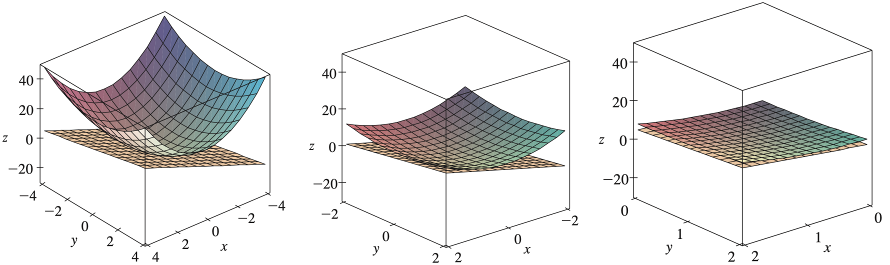
$$f_y(x, y) = 2y \qquad f_y(1, 1) = 2$$

pa je jednačina tangentne ravni

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

odnosno

$$z = 4x + 2y - 3.$$



Na slikama su prikazani paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ i tangentna ravan $z = 4x + 2y - 3$ u tački $(1, 1, 3)$.

Svaka naredna slika je više zumirana. Primijetimo da se na posljednjoj slici paraboloid i ravan gotovo poklapaju. Takodje primijetimo da tragovi (linije nivoa) paraboloida zumiranjem postaju prave, što je karakteristika ravni.

Dakle, lokalno, tj. za sve (x, y) iz okoline tačke (x_0, y_0), ako su parcijalni izvodi funkcije f tu neprekidni, tangentna ravan aproksimira grafik funkcije f, što pišemo

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = L(x, y).$$

Funkciju sa desne starne zovemo **linearna aproksimacija funkcije** f u tački (x_0, y_0), i pišemo

$$f(x, y) \approx L(x, y), \qquad (x, y) \to (x_0, y_0).$$

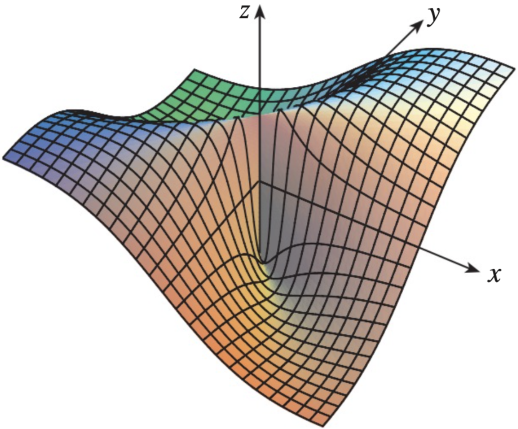
Definicija diferencijabilnosti

Vidjeli smo da kada funkcija ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj tački, linearna aproksimacija lokalno stvarno liči na grafik funkcije. Inače to ne mora da važi.

Primjer. Posmatrajmo funkciju

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ova funkcija ima parcijalne izvode svuda, ali nisu neprekidni u $(0,0)$. Kako je $f(0,0) = 0$ i $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, to je $L(x,y) = 0$. Medjutim, $f(a,a) = 1/2$, $a \neq 0$, što znači da na cijeloj pravoj $y = x$, osim u tački $(0,0)$, funkcija ima vrijednost $1/2$, pa linearna aproksimacija nije dobra.


z
y
x

Ako je linearna aproksimacija dobra, kažemo da je funkcija diferencijabilna u tački (x_0, y_0).
Preciznije diferencijabilnost u tački definišemo na sljedeći način.

Definicija diferencijabilnoisti

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) ako se može prikazati u obliku

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0)$$

gdje $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, kada $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Ekvivalentan zapis je takodje

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

Dovoljan uslov za diferencijabilnost u tački

Ako parcijalni izvodi funkcije f postoje u okolini tačke (x_0, y_0) i neprekidni su u (x_0, y_0), onda je funkcija f diferencijabilna u tački (x_0, y_0).

Primjer. Pokazati da je funkcija

$$f(x,y) = xe^{xy}$$

diferencijabilna u tački $(1,0)$ i naci njenu linearizaciju.
Parcijalni izvodi su

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_x(1,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = x^2e^{xy} \qquad f_y(1,0) = 1$$

Funkcije f_x i f_y su neprekidne pa je f diferencijabilna. Linearizacija funkcije f u okolini tačke $(1,0)$ je

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) \\ &= 1 + 1(x-1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

Dakle,

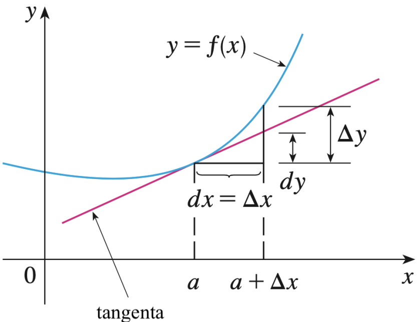
$$xe^{xy} \approx x + y$$

Diferencijal

Podsjetimo se, za funkciju jedne promjenljive $y = f(x)$ diferencijal od y definišemo sa

$$dy = f'(x)dx,$$

pri čemu diferencijal dx nezavisne promjenljive je nezavisna promjelnjiva (može imati bilo koju vrijednost iz $\mathbb{R}$).



Na slici
su prikazane relacije izmedju priraštaja Δy i diferencijala dy:
Δy prikazuje priraštaj (promjenu)
ordinate krive $y = f(x)$,
a dy prikazuje priraštaj koji dobije ordinata tangente na krivu kada se x promijeni za $dx = \Delta x$.

Ako je $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija, onda diferencijal

$$dy = f'(x)dx$$

možemo koristiti za aproksimaciju (za male Δx) vrijednosti priraštaja

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

S tim u vezi je i Tejlorov polinom prvog reda, odnosno, aproksimacija funkcije istim, naime,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0.$$

Posmatrajmo sada funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$ i aproksimirajmo je na sljedeći način:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz, \quad (x, y) \to (a, b).$$

Za traženu aproksimaciju koristićemo jednačinu tangentne ravni,

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Kako se grafik funkcije lokalno aproksimira tangentnom ravni, koristimo da je

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b), \quad (x, y) \to (a, b)$$

Dakle, diferencijal funkcije dvije promjelnljive definišemo kao

$$dz = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

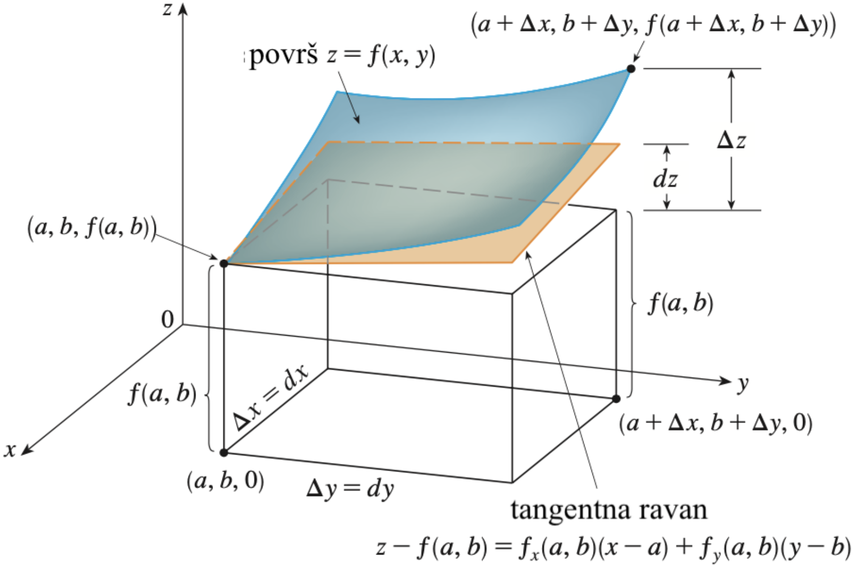
Iako je uobičajeno koristiti oznaku za diferencijal dz napomenimo da bi bilo preciznije koristiti

$$dz = dz_{(a,b)}(dx, dy)$$

što aludira na pun naziv diferencijala funkcije $z = f(x,y)$, tj. diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ u tački (a,b) koji odgovara priraštaju (dx, dy).
Ipak, najčešće pišemo

$$dz = z_x dx + z_y dy.$$

Ova veličina zove se i totalni diferencijal.



z
$(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y))$
površ $z=f(x,y)$
Δz
dz
$(a, b, f(a,b))$
$f(a,b)$
0
$f(a,b)$
$\Delta x = dx$
y
x
$(a+\Delta x, b+\Delta y, 0)$
$(a, b, 0)$
$\Delta y = dy$
tangentna ravan
$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

Na slici vidimo:

- grafik funkcije $z = f(x, y)$,
- tangentnu ravan u tački $P(a, b, f(a, b))$
- ravan $z = f(a, b)$.
- Tačka Q ima koordinate $Q(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a + \Delta x, b + \Delta y))$, jer je $f(a + dx, b + dy) = f(x, y) = z = f(a, b) + \Delta z$.

Diferencijal dz je, stoga, geometrijski predstavljen kao rastojanje izmedju tačke $A(a + dx, b + dy, f(a, b))$ koja leži u ravni $z = f(a, b)$ i tačke $B(a + dx, b + dy, f(a, b) + dz)$ koja leži u tangentnoj ravni $z = f(a, b) + f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$.

Primjer. (a) Naći diferencijal funkcije

$$z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$$

(b) Uporedi vrijednosti Δz i dz ako se x mijenja od 2 do 2.05 i y se mijenja od 3 do 2.96.

(a) Iz definicije diferencijala dobijamo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy.$$

(b) Postavljajući $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$, $dy = \Delta y = -0.04$ dobijamo

$$dz = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)0.05 + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3)(-0.04) = 0.65.$$

Priraštaj Δz je

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2,3) \\ &= \left((2.05)^2 + 3 \cdot 2.05 \cdot 2.96 - (2.96)^2\right) - \left(2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3^2\right) \\ &= 0.6449 \end{aligned}$$

Dakle,

$$\Delta z \approx dz,$$

ali dz se lakše računa.

Definicija diferencijala dvije promjenljive se proširuje na funkcije tri i više promjenljivih.
Za funkciju tri promjenljive $u = f(x, y, z)$ diferencijali dx, dy i dz nezavisne promjenljive pa je diferencijal du (zovemo ga i totalni diferencijal) definisan sa

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Ako za funkciju $u = f(x, y, z)$ možemo koristiti diferencijal du za aproksimaciju vrijednosti priraštaja Δu, onda kažemo da je ta funkcija diferencijabilna.

Diferencijal skalarne funkcije $f = f(x_1, ..., x_d)$ d-promjenljivih, definišemo analogno, samo nam je sada i vektor priraštaja $d\vec{x} = (dx_1, ..., dx_d)$. Dakle,

$$df = \begin{pmatrix} f_{x_1} & \cdots & f_{x_d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \cdots \\ dx_d \end{pmatrix} = \nabla f \cdot d\vec{x}$$

Oznaku ∇f čitamo gradijent funkcije f u tački x_0. To je vektor čije su komponente parcijalni izvodi funkcije f u tački x_0, odnosno,

$$\nabla f(x0) = grad\, f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \ldots, f_{x_d}(x_0)).$$

Napomenimo da se vektor $\nabla f(x_0)$ označava još i sa $Df(x_0)$ i zove izvod funkcije f u tački x_0. Ova reprezentacija važi samo u Dekartovim koordinatama.